

CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA-MG

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

1 MATRIZES

Chama-se matriz A do tipo $m \times n$ (lê-se "m por n") a toda tabela com m linhas e n colunas[cite: 1]. Diz-se, também, que $m \times n$ é a dimensão ou tipo da matriz A [cite: 1]. Denota-se uma matriz A do tipo $m \times n$ por $A_{m \times n}$ [cite: 1]. Uma matriz A é representada colocando-se seus elementos entre parênteses ou entre colchetes[cite: 1]. Assim, a matriz $A_{2 \times 3}$ pode ser representada por[cite: 1]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Há duas maneiras de se representar uma matriz A do tipo $m \times n$: a forma explícita e a forma simplificada[cite: 1].

1.1 FORMA Explícita

Nessa forma, a matriz $A_{m \times n}$ é representada indicando-se cada um dos elementos por uma letra minúscula acompanhada de dois índices: o primeiro indicando a linha e o segundo a coluna[cite: 1]. Assim, se indicarmos os elementos pela letra a , então, o elemento da linha i e coluna j será indicado por a_{ij} [cite: 1]. Logo[cite: 1],

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2 FORMA Simplificada

Nessa forma, a matriz $A_{m \times n}$ é dada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, em que a_{ij} indica o elemento da linha i e coluna j [cite: 1]. Assim, $A_{2 \times 3}$ é equivalente à $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ [cite: 1].

2 Tipos de matrizes

2.1 Matriz Linha

Chama-se matriz linha a toda matriz que possui apenas uma linha ($m = 1$)[cite: 1]. Genericamente, $A_{1 \times n}$ [cite: 1].

Exemplo 1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$, matriz linha do tipo 1×4 [cite: 1].

2.2 Matriz Coluna

Chama-se matriz coluna a toda matriz que possui apenas uma coluna ($n = 1$)[cite: 1]. Genericamente, $A_{m \times 1}$ [cite: 1].

Exemplo 2. $A = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$, matriz coluna do tipo 2×1 [cite: 1].

2.3 Matriz Quadrada

Chama-se matriz quadrada a toda matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$)[cite: 1]. Genericamente, $A_{n \times n}$ [cite: 1]. Diz-se, portanto, que a matriz A é de ordem n [cite: 1]. Nesse contexto, se A é quadrada, então[cite: 1]:

- a) os elementos de a_{ij} tais que $i = j$, formam a diagonal principal de A [cite: 1];
- b) os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ formam a diagonal secundária de A [cite: 1].

2.4 Matriz Identidade (ou Matriz Unidade)

Chama-se matriz identidade de ordem n , $n \geq 2$, a toda matriz quadrada de ordem n , tal que os elementos da diagonal principal são iguais a um, e os demais elementos iguais a zero[cite: 1]. Se $n = 1$, o elemento da matriz identidade é igual a um[cite: 1].

Exemplo 3.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[cite: 1]

2.5 Matriz Nula

Chama-se matriz nula à matriz que possui todos os elementos iguais a zero[cite: 1].

2.6 Matriz Transposta

Chama-se matriz transposta da Matriz $A_{m \times n}$ à Matriz $A_{n \times m}$ cujas linhas (colunas) coincidem ordenadamente com as colunas (linhas) da Matriz A [cite: 1].

Exemplo 4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ [cite: 1]. Logo, $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ [cite: 1].

2.7 Matriz Oposta

Chama-se matriz oposta da matriz A à matriz em que seus elementos são os opostos dos elementos correspondentes da matriz A [cite: 1].

Exemplo 5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ [cite: 1]. Então, $-A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -3 & -8 & -5 \end{bmatrix}$ [cite: 1].

2.8 Matriz Simétrica

Se uma matriz quadrada $A_{(n)} = (a_{ij})$ tem $a_{ij} = a_{ji} \forall$ par (i, j) , então A é uma matriz simétrica[cite: 1].

Exemplo 6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ [cite: 1].

2.9 Matriz Antissimétrica

Se uma matriz quadrada $A_{(n)} = (a_{ij})$ possui $a_{ij} = 0$, para $i = j$ e $a_{ij} = -a_{ji}$ para $i \neq j$, então A é uma matriz antissimétrica[cite: 1].

2.10 Matriz Triangular

É a matriz quadrada que possui todos os elementos nulos, acima ou abaixo da diagonal principal[cite: 1].

Exemplo 7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ (*Triangular Inferior*) [cite: 1].

$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (*Triangular Superior*) [cite: 1].

3 OPERAÇÃO COM MATRIZES

3.1 Igualdade entre Matrizes

Duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ do mesmo tipo $m \times n$, são ditas iguais se, e somente se, os elementos correspondentes de A e B são iguais[cite: 1].

Exemplo 8. Se $\begin{bmatrix} x & 1 \\ y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & z \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, então, $x = -1$; $y = 5$ e $z = 1$ [cite: 1].

3.2 Adição de Matrizes

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$, do mesmo tipo $m \times n$, dizemos que C é a soma de A com B se, e somente se, cada elemento de C for a soma dos seus elementos correspondentes de A e B[cite: 1].

Exemplo 9. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ [cite: 1]. Então, $C = A + B$ vale [cite: 1]:

$$C = \begin{bmatrix} 1+x & 4+3 \\ 2+6 & 5+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 7 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Sejam A, B, C e O (nula) do mesmo tipo. Então[cite: 1]:

- a) comutativa: $A + B = B + A$ [cite: 1];
- b) associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$ [cite: 1];
- c) elemento neutro: $A + O = A$ [cite: 1];
- d) elemento oposto: $A + (-A) = O$ [cite: 1];
- e) transposta da soma: $(A + B)^t = A^t + B^t$ [cite: 1].

3.3 Subtração de Matrizes

Semelhante à adição[cite: 1].

3.4 Multiplicação de um número (escalar) por uma Matriz

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ do mesmo tipo $m \times n$ e um número k, diz-se que B é o produto de k por A se, e somente se, B for obtida multiplicando-se por k todos os elementos de A[cite: 1].

Exemplo 10. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$, $k = 2$ e $B = k \cdot A$, então [cite: 1]:

$$B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 6 & 16 & 10 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Sejam A e B matrizes do mesmo tipo $m \times n$, e k e s, escalares[cite: 1]. Logo[cite: 1]:

- a) $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$ [cite: 1]
- b) $(k + s) \cdot A = k \cdot A + s \cdot A$ [cite: 1]

- c) $k \cdot (s \cdot A) = (k \cdot s) \cdot A$ [cite: 1]
- d) $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$ [cite: 1]

3.5 Multiplicação de Matrizes

Dadas as matrizes $A_{m \times p}$ e $B_{p \times n}$, diz-se que a matriz C do tipo $m \times n$ é o produto de A por B se, e somente se, cada elemento C da matriz C for obtido multiplicando-se, ordenadamente, os elementos da linha i de A pelos elementos da coluna j de B e, posteriormente, somando-se os produtos obtidos[cite: 1].

OBSERVAÇÕES

- 1) o produto existirá se o número de colunas de uma matriz for igual ao número de linhas da outra matriz[cite: 1]. Assim, $A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} \Rightarrow \exists C = A \cdot B$ [cite: 1].
- 2) C é do tipo $m \times n$ [cite: 1];
- 3) Se existe o produto $A \cdot B$, não implica, necessariamente, na existência de $B \cdot A$ [cite: 1].

Exemplo 11. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ [cite: 1]. Então $A \cdot B$ [cite: 1]:

$$\begin{bmatrix} 2(1) + 3(-2) & 2(2) + 3(0) & 2(3) + 3(4) \\ 0(1) + 1(-2) & 0(2) + 1(0) & 0(3) + 1(4) \\ -1(1) + 4(-2) & -1(2) + 4(0) & -1(3) + 4(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Sejam as matrizes A, B, C, I (identidade) e r um número (escalar)[cite: 1]. Admitindo as condições para as operações de adição e multiplicação, valem as propriedades[cite: 1]:

- 1) associativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ [cite: 1];
- 2) distributiva pela esquerda: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ [cite: 1];
- 3) distributiva pela direita: $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ [cite: 1];
- 4) $r \cdot (A \cdot B) = (r \cdot A) \cdot B$ [cite: 1];
- 5) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ [cite: 1];
- 6) $A_{m \times n} \cdot I_n = A$ e $I_m \cdot A_{m \times n} = A$ [cite: 1].

3.6 Potência de uma Matriz

Seja A uma matriz quadrada[cite: 1]. Chama-se potência de base A e expoente n ($n \in \mathbb{N}$) a matriz que se indica por A^n e se define por: $A^0 = I$, $A^1 = A$ e $A^n = A^{n-1} \cdot A$ para $n \geq 2$ [cite: 1].

Exemplo 12. *Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, teremos: $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [cite: 1].*

3.7 Matriz Inversa

Dada uma matriz A , quadrada, de ordem n , se existir uma matriz A' , de mesma ordem, tal que $A \cdot A' = A' \cdot A = I_n$ então A' é matriz inversa de A [cite: 1]. (Em outras palavras: Se $A \cdot A' = A' \cdot A = I_n$, isto implica que A' é a matriz inversa de A , e é indicada por A^{-1} [cite: 1]).

Exemplo 13. *Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, vamos determinar a matriz inversa de A , se existir[cite: 1]. Como, para que exista inversa, é necessário que $A \cdot A' = I_n$ [cite: 1]:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ -2a + c & -2b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir da igualdade de matrizes, resolvemos o sistema acima pelo método da adição e chegamos à[cite: 1]:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

4 Criptografia

4.1 O que é Criptografia?

Criptografia é a ciência de proteger informações, tornando-as ilegíveis para quem não tem a chave de acesso[cite: 1]. Ela é utilizada em muitas situações do nosso dia a dia, como em mensagens de e-mail, transações bancárias e comunicações online[cite: 1]. Para criptografar uma mensagem, usamos um algoritmo e uma chave[cite: 1]. O objetivo é embaralhar as informações para que apenas a pessoa que conhece a chave consiga "desembaralhar" a mensagem e entender o conteúdo[cite: 1].

Uma forma simples de criptografar uma mensagem é substituir letras ou embaralhar os caracteres[cite: 1].

4.2 Relação entre Matrizes e Criptografia

Matrizes são estruturas matemáticas que podem ser usadas para transformar uma mensagem em um código[cite: 1]. As matrizes funcionam como uma espécie de "chave" para embaralhar e reorganizar os dados da mensagem, tornando-a ilegível para quem não souber o procedimento correto[cite: 1].

- Codificação: Multiplicar uma matriz associada à mensagem por uma matriz-chave para obter o código[cite: 1].
- Decodificação: Multiplicar o código pela matriz inversa da chave para recuperar a mensagem original[cite: 1].

4.3 Exemplo: Codificação de uma Mensagem

Vamos codificar uma mensagem, mas para isso, precisamos de uma chave de codificação e outra de decodificação[cite: 1]. A chave de codificação será a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ e a

chave de decodificação, a inversa da matriz A, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ [cite: 1].

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, fazemos sua inversa por: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ [cite: 1]. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, sua inversa será[cite: 1]: $\det(A) = 3(7) - 4(5) = 1$, que

aplicado na fórmula, leva a[cite: 1]: $A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, que é a nossa chave de decodificação[cite: 1].

5 EXERCÍCIOS

1- Qual é a principal função da criptografia?[cite: 1]

- a) Tornar as informações públicas.
- b) Proteger as informações e torná-las ilegíveis para quem não possui a chave.
- c) Aumentar a velocidade das transmissões.
- d) Garantir que as mensagens sejam mais longas.

2- O que é uma matriz na matemática?[cite: 1]

- a) Um número inteiro.
- b) Uma tabela com números organizada em linhas e colunas.

- c) Um vetor de uma única dimensão.
 - d) Um conjunto de letras e símbolos.
- 3-** Qual é o objetivo de usar uma matriz na criptografia?[cite: 1]
- a) Tornar a mensagem pública.
 - b) Embaralhar e codificar a mensagem.
 - c) Dividir as mensagens em partes.
 - d) Organizar as mensagens.
- 4-** Como podemos decodificar uma mensagem criptografada com matrizes?[cite: 1]
- a) Somando os números.
 - b) Multiplicando os números.
 - c) Usando a matriz inversa da chave.
 - d) Subtraindo os números.
- 5-** Para decodificar uma mensagem criptografada com matrizes, qual operação deve ser realizada?[cite: 1]
- a) Subtrair os números.
 - b) Multiplicar a mensagem pela matriz inversa.
 - c) Adicionar os números.
 - d) Subtrair a matriz original.