Centro Federal de Educação Tecnológica-MG
Departamento de Matemática

Soluções dos Exercícios de Matrizes

1) **(Esa 2023)** Da equação matricial, obtemos: $MC = P$

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 13 \\ 19 & 44 & 13 \\ 1 & -10 & 0 \end{pmatrix}$

Efetuando o produto matricial, obtemos:

$$\begin{pmatrix} a & a-b+2c & c \\ d & d+2f-e & f \\ g & g-h+2i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 40 & 13 \\ 19 & 44 & 13 \\ 1 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema, chegamos a:

$$(a,b,c,d,e,f,g,h,i) = (15,1,13,19,1,13,1,11,0)$$

Logo, a mensagem enviada foi:

$$(15,1,13,19,1,13,1,11,0) = (P,A,N,T,A,N,A,L,I)$$

PANTANAL!

Alternativa C.

2) **(Upf 2023)**

De acordo com as informações da questão, podemos escrever que:

Temos:

$$C \cdot D = I$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Efetuando o produto matricial, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2x+y & 2z+w \\ 5x+3y & 5z+3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Considerando a igualdade acima, temos os sistemas:

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 5x+3y=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=3 \\ y=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2z+w=0 \\ 5z+3w=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} z=-1 \\ w=2 \end{cases}$$

Logo,

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Alternativa e.

3) **(Puc-GO 2020)**

Matriz X:

$$X \cdot C = Y$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Efetuando o produto matricial, obtemos:

$$\begin{pmatrix} 2x & x+2y \\ 2z & z+2w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Logo, o sistema:

$$\begin{cases} 2x = 12 \\ x + 2y = 8 \\ 2z = 6 \\ z + 2w = 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \\ z = 3 \\ w = 1 \end{cases}$$

Assim,

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & a \\ c & a \end{pmatrix}$$

Portanto, a palavra transmitida foi **"faca"**.

Alternativa d.

4) **(Fuvest 2019)**

a) Como a mensagem a ser codificada é

$$M = \begin{pmatrix} E & S & C \\ O & L & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix},$$

temos

$$N = A \cdot M$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 19 & 3 \\ 15 & 12 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 35 & 43 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Sendo $N = A \cdot M$ equivalente a $M = A^{-1} \cdot N$, devemos encontrar a matriz inversa de A.

Logo, vem:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \to (-1)L_1 + L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1\to(-1)L_2+L_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Assim, temos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 39 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 7 & 21 \\ 14 & 4 & 1 & 27 \end{pmatrix}$$

A mensagem é:

$$M = \begin{pmatrix} S & E & G & U \\ N & D & A & * \end{pmatrix}$$

c) Seja

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \gamma \end{pmatrix}, \quad \text{com } \alpha, \beta, \lambda, \gamma \text{ inteiros positivos.}$$

Logo, temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \lambda & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha - 7\lambda & 2\beta - 7\gamma \\ 4\alpha - 14\lambda & 4\beta - 14\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donde vem o sistema:

$$\begin{cases} 2\alpha - 7\lambda = 0 \\ 2\beta - 7\gamma = 0 \\ 4\alpha - 14\lambda = 0 \\ 4\beta - 14\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{7}{2}\lambda \\ \beta = \dfrac{7}{2}\gamma \end{cases}$$

Em consequência, como $1 \leq \alpha, \beta \leq 27$, segue que

$$\lambda, \gamma \in \{2, 4, 6\}.$$

Portanto, dentre as $3 \times 3 = 9$ possibilidades para a matriz M, temos apenas:

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 21 & 14 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 21 & 21 \\ 6 & 6 \end{pmatrix},$$

que correspondem, respectivamente, às sequências

GGBB, GNBD, GUBF e UNFD.

5) **(Famerp 2019)** Calculando:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -x & -y \\ 2z & 2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x = 1 \Rightarrow x = -1 \\ -y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 2z = 0 \Rightarrow z = 0 \\ 2w = 1 \Rightarrow w = 1/2 \end{cases}$$

$$x+y+z+w=-1+0+0+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

Alternativa e.

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES:

Leia o texto para responder à(s) questão(ões) a seguir.

A tabela a seguir será usada para a transmissão de mensagens criptografadas em matrizes. A criptografia é feita ao se multiplicar a matriz pela matriz-mensagem gerando a matriz criptografada $M_C = C.M$.

0	7	G	14	N	21	U
1	A	8	H	15	O	22
2	B	9	I	16	P	23
3	C	10	J	17	Q	24
4	D	11	K	18	R	25
5	E	12	L	19	S	26
6	F	13	M	20	T	27

$$C=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\2&3&2\end{pmatrix}$$

Por exemplo, a matriz-mensagem

$$M=\begin{pmatrix}5&19&20&15&21&0\\14&15&0&0&0&0\\9&14&19&16&5&18\end{pmatrix},$$

que significa ESTOU NO INSPER, depois de criptografada por C, vira a matriz

$$M_C=\begin{pmatrix}33&67&59&46&5&18\\28&48&39&31&5&18\\70&111&78&62&10&36\end{pmatrix}.$$

Ao receber M_C, o destinatário deve multiplicá-la pela matriz decodificadora D, da mesma ordem da matriz C, para recuperar a mensagem original.

5) **(Insper 2018)**

Sendo $M_C = C \cdot M$, a matriz D é tal que:

$$\begin{aligned}D\cdot M_C = M &\Rightarrow D\cdot C\cdot M = M\\&\Rightarrow D\cdot C\cdot M - M = 0\\&\Rightarrow (D\cdot C - I)\cdot M = 0\\&\Rightarrow D\cdot C = I\\&\Rightarrow D = C^{-1}\end{aligned}$$

Tomando a matriz em bloco $N = (C \mid I_3)$, em que I_3 é a matriz identidade de ordem 3, vem:

$$|N = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{cases} L_2' \leftrightarrow (-2)\cdot L_1' + L_2' \\ L_3' \leftrightarrow (-2)\cdot L_1' + L_3' \end{cases}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2'' \leftrightarrow L_3''}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{cases} L_1''' \leftrightarrow (-1)\cdot L_2''' + L_1''' \\ L_3''' \leftrightarrow 1\cdot L_2''' + L_3''' \end{cases}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3^{iv} \leftrightarrow (-1)\cdot L_3^{iv}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_1^{v} \leftrightarrow (-1)\cdot L_3^{v} + L_1^{v}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

Portanto, segue que a matriz decodificadora é $D = C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

A matriz decodificadora D será

alternativa a

6) **(Insper 2018)** A matriz-mensagem correspondente a EU ESTUDEI NO INSPER é:

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 19 & 20 & 21 & 4 & 5 & 9 \\ 14 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 14 & 19 & 16 & 5 & 18 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, como a ordem da matriz M é $4{\times}7$ e a matriz M_C também possui ordem $4{\times}7$, segue que, pela condição de existência do produto de matrizes, a matriz C necessariamente deve ser de ordem 4×4. Ademais, temos:

$$\begin{aligned} D \cdot M_C = M &\Rightarrow D \cdot C \cdot M = M \\ &\Rightarrow D \cdot C \cdot M - M = 0 \\ &\Rightarrow (D \cdot C - I) \cdot M = 0 \\ &\Rightarrow D \cdot C = I \\ &\Rightarrow D = C^{-1}, \end{aligned}$$

ou seja, a matriz C deve ser invertível.

Alternativa c.

7) (Fgv 2017)

Calculando:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -10 & 27 \\ 21 & -39 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 27 \\ 21 & -39 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3a - c & 3b - d \\ -5a + 2c & -5b + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 27 \\ 21 & -39 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a - c = -10 \\ -5a + 2c = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b - d = 27 \\ -5b + 2d = -39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 15 \\ d = 18 \end{cases}$$

$$a + b + c + d = 1 + 13 + 15 + 18 = 47.$$

Alternativa d.

8) (Ueg 2016)

Com os dados do enunciado, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$$

Alternativa b.

9) **(Uel 2013)**

A matriz M é tal que:

$$M = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 13 & 8 & 50 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 34 & 32 & 3 & 4 & 0 \\ 45 & 28 & 13 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 45 & 16 & 20 & 11 & 17 & 0 \\ 1 & 50 & 21 & 3 & 35 & 42 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 11 & 10 & 15 & -8 & 30 & -1 \\ 14 & 31 & 19 & 19 & -3 & -4 & 0 \\ 6 & -4 & 8 & 31 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 6 & 16 & 32 & 20 & -17 & 0 \\ 44 & -8 & 13 & 30 & 20 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 22 & 31 & 23 & 23 & 42 & 55 & 0 \\ 14 & 31 & 53 & 51 & 0 & 0 & 0 \\ 51 & 22 & 21 & 55 & 0 & 0 & 0 \\ 22 & 51 & 32 & 52 & 31 & 0 & 0 \\ 45 & 42 & 34 & 33 & 55 & 52 & 31 \end{pmatrix}$$

Portanto, a chefia informou a José: “Sorria, você está sendo filmado”. **Alternativa b.**

10) **(UFF 2011)**

Seja $P = (p_{ij})_{3\times 1}$, definida por $p_{i1} = \begin{cases} a, & \text{se } m_{i1} = 1 \text{ e } m_{i2} = m_{i3} = 0 \\ b, & \text{se } m_{i2} = 1 \text{ e } m_{i1} = m_{i3} = 0 \\ c, & \text{se } m_{i3} = 1 \text{ e } m_{i1} = m_{i2} = 0 \end{cases}$,

sendo $(m_{ij})_{3\times 3} = M$.

Se $P = \begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix}$, então $p_{11} = c, p_{21} = a$ e $p_{31} = b$. Logo, $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Alternativa a.

11) **(Uel 2006)**

Alternativa a.

12) **(Uff 2005)**

Alternativa c.